Problema 1.01. *Uma onda plana uniforme polarizada em y, com frequência 100MHz, propaga-se no ar em x e incide normalmente sobre um plano condutor perfeito em x=0. Assumindo a amplitude do campo elétrico de 6mV/m, escrea as expressões fasoriais e instantâneas para:*

Resolução:

a) *Calcule os campos incidentes*

Considerando os dados, sabemos que $\omega = 2\pi f = 2\pi \times 10^8 [rad/s]$

$$\beta_1 = k_0 = \frac{w}{c} = \frac{2\pi \times 10^8}{3 \times 10^8} = \frac{2\pi}{3}$$

A impedância do meio 1 é

$$\eta_1 = \eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi$$

Os campos incidentes serão então

$$\vec{E_i(x)} = \vec{a_y} 6 \times 10^{-3} e^{-j2\pi x/3}$$

$$\vec{H_i(x)} = \frac{1}{\eta_1} \vec{a_x} \times \vec{E_i(x)} = \vec{a_z} \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{-j2\pi x/3}$$

$$E_i(\vec{x}, t) = Re[\vec{E_i(x)} e^{jwt}] = \vec{a_y} 6 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x)$$

$$H_i(\vec{x}, t) = Re[\vec{H_i(x)} e^{jwt}] = \vec{a_z} \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t - \frac{2\pi}{3} x)$$

b) *Os campos refletidos*

$$\vec{E_r(x)} = -\vec{a_y} 6 \times 10^{-3} e^{j2\pi x/3}$$

$$\vec{H_r(x)} = \frac{1}{\eta_1} (-\vec{a_x}) \times \vec{E_i(x)} = \vec{a_z} \frac{10^{-4}}{2\pi} e^{j2\pi x/3}$$

$$E_r(\vec{x}, t) = Re[\vec{E_r(x)} e^{jwt}] = -\vec{a_y} 6 \times 10^{-3} \cos(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x)$$

$$H_r(\vec{x}, t) = Re[\vec{H_r(x)} e^{jwt}] = \vec{a_z} \frac{10^{-4}}{2\pi} \cos(2\pi \times 10^8 t + \frac{2\pi}{3} x)$$

c) *Os campos totais no ar, sabendo que* $e^{-ja} - e^{ja} = -j2sin(a)$ e $e^{-ja} + e^{ja} = 2cos(a)$

$$\vec{E_1(x)} = \vec{E_i(x)} + \vec{E_r(x)} = -\vec{a_y} j 12 \times 10^{-3} \sin(\frac{2\pi}{3} x)$$

$$\vec{H_1(x)} = \vec{H_i(x)} + \vec{H_r(x)} = \vec{a_z} \frac{10^{-4}}{\pi} \cos(\frac{2\pi}{3} x)$$

$$E_1(\vec{x}, t) = Re[\vec{E_1(x)} e^{jwt}] = \vec{a_y} 12 \times 10^{-3} \sin(\frac{2\pi}{3} x) sin(2\pi \times 10^8 t)$$

$$H_1(\vec{x}, t) = Re[\vec{H_1(x)} e^{jwt}] = \vec{a_z} \frac{10^{-4}}{\pi} \cos(\frac{2\pi}{3} x) \cos(2\pi \times 10^8 t)$$

d) *Determine o local mais próximo ao plano condutor onde o campo total é nulo*
Esse ponto pode ser encontrado em $\lambda/2$, portanto, para $\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1}$

$$x = -\frac{\lambda_1}{2} = -\frac{\pi}{\beta_1} = -\frac{\pi}{\frac{2\pi}{3}} = -\frac{3}{2}[m]$$

Problema 1.02. (slides)
Uma onda plana uniforme em um meio sem perdas e com impedância η_1 incide normalmente sobre uma interface com um outro meio sem perdas e de impedância intrínsica η_2. Obtenha expressões para as densidades de potência média em ambos os meios.
Resolução: Escrevendo os campos incidentes, refletidos e transmitidos, temos:

$$\vec{E_i}(z) = \vec{a_x} E_{i0} e^{-j\beta_1 z} \rightarrow \vec{H_i}(z) = \vec{a_y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}$$

$$\vec{E_r}(z) = \vec{a_x} E_{r0} e^{j\beta_1 z} \rightarrow \vec{H_r}(z) = (-\vec{a}_z) \times \frac{\vec{E_r}(z)}{\eta_1} = -\vec{a}_y \frac{E_{r0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}$$

$$\vec{E_t}(z) = \vec{a_x} E_{r0} e^{-j\beta_2 z} \rightarrow \vec{H_t}(z) = (\vec{a_z}) \times \frac{\vec{E_t}(z)}{\eta_2} = \vec{a_y} \frac{E_{t0}}{\eta_2} e^{-j\beta_2 z}$$

Através das equações acima, aplicando as condições de contorno
$\vec{E_i}(z=0) + \vec{E_r}(z=0) = \vec{E_t}(z=0)$ e $\vec{H_i}(z=0) + \vec{H_r}(z=0) = \vec{H_t}(z=0)$. Portanto

$$R = \frac{\vec{E_{r0}}}{\vec{E_{i0}}} = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \qquad \longrightarrow \qquad T = \frac{\vec{E_{t0}}}{\vec{E_{i0}}} = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1}$$

Para calcular a densidade de potência no meio 1, calcula-se o campo total. Assim

$$\vec{E_1}(z) = \vec{E_i}(z) + \vec{E_r}(z) = \vec{a_x} E_{i0}(e^{-j\beta_1 z} + Re^{j\beta_1 z}) = \vec{a_x} E_{i0} e^{-j\beta_1 z}(1 + Re^{2j\beta_1 z})$$

$$\vec{H_1}(z) = \vec{H_i}(z) + \vec{H_r}(z) = \vec{a_y} \frac{E_{i0}}{\eta_1}(e^{-j\beta_1 z} - Re^{j\beta_1 z}) = \vec{a_y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{-j\beta_1 z}(1 - Re^{2j\beta_1 z})$$

A densidade de potência, através do vetor de Poynting do meio 1 é então

$$\mathbb{P}_{av1} = \frac{1}{2}\mathbb{R}e[\vec{E_1} \times \vec{H_1^*}] = \frac{1}{2}\mathbb{R}e[(\vec{a_x} E_{i0} e^{-j\beta_1 z}(1 + Re^{2j\beta_1 z})) \times (\vec{a_y} \frac{E_{i0}}{\eta_1} e^{j\beta_1 z}(1 - Re^{-2j\beta_1 z}))]$$

$$\mathbb{P}_{av1} = (\vec{a_z}) \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \mathbb{R}e[(1 + Re^{2j\beta_1 z})(1 - Re^{2j\beta_1 z})] = (\vec{a_z}) \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \mathbb{R}e[(1 - R^2) + R(e^{2j\beta_1 z} - e^{-2j\beta_1 z})]$$

$$\mathbb{P}_{av1} = (\vec{a_z}) \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1} \mathbb{R}e[(1 - R^2) + j2T \sin(2\beta_1 z)] = (\vec{a_z}) \frac{E_{i0}^2}{2\eta_1}(1 - R^2)$$

Como no meio 2 só existem as ondas transmitidas

$$\mathbb{P}_{av2} = \frac{1}{2}\mathbb{R}e[\vec{E_t} \times \vec{H_t^*}] = \frac{1}{2}\mathbb{R}e[(\vec{a_x} T E_{i0} e^{-j\beta_2 z}) \times (\vec{a_y} \frac{T E_{i0}}{\eta_2} e^{j\beta_2 z})]$$

$$\mathbb{P}_{av2} = \vec{a_z}\frac{E_{i0}^2}{2\eta_2}T^2$$

Como não há perdas no meio, a potência do meio 1 deve ser igual à do meio 2. Portanto

$$\mathbb{P}_{av1} = \mathbb{P}_{av2} \qquad \Rightarrow \qquad 1 - R^2 = \frac{\eta_1}{\eta_2}T^2$$

Problema 1.03. (Cheng Cap 8 Ex 22)
Uma onda plana uniforme e senoidal se propaga pelo ar com a seguinte expressão fasorial para a intensidade do campo elétrico

$$\vec{E_i}(x,z) = \vec{a_y}10e^{-j(6x+8z)}$$

Essa onda incide em z=0 em um meio não magnético de constante relativa $\epsilon_r = 2,5$. *Calcule:*

a) *A frequência e o comprimento de onda dessa onda.*

Nesse exercício está sendo adotado o modo TE, como mostra a figura 1. A constante de fase $\vec{k} = k_x\vec{a_x} + k_z\vec{a_z} = 6\vec{a_x} + 8\vec{a_z}$. Assim, $\beta = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ rad/m

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \rightarrow \lambda = 0.628 \text{ [m]}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} \rightarrow f = 4.78 \times 10^8 \text{ [Hz]}$$

$$\omega = 2\pi f = 3 \times 10^9 \text{rad/s}$$

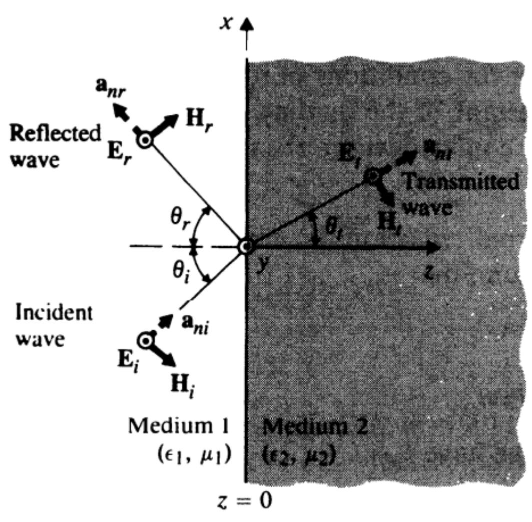

Figura 1: Figura para o exercício 1.03

b) *Determine o ângulo de incidência.* $\tan^{-}-1(\frac{6}{8}) = 36.86°$

c) *Escreva a expressão dos campos* $\vec{E_i}(x,z,t)$ *e* $\vec{H_i}(x,z,t)$, *mostrando a dependência temporal com o cosseno.*

$$\vec{E_i}(x,z,t) = \vec{a_y}10\cos(3\times10^9 t - 6x - 8z)$$

$$\vec{H}_i(x,z) = \frac{1}{\eta_0}\vec{a_{ni}} \times \vec{E}_i(x,z) \rightarrow \vec{a_{ni}} = 0.6\vec{a_x} + 0.8\vec{a_z}$$

$$\vec{H}_i(x,z) = \frac{1}{120\pi}(\vec{a_x}0.6 + \vec{a_z}0.8) \times (\vec{a_y}10e^{-j(6x+8z)})$$

$$\vec{H}_i(x,z) = \frac{1}{120\pi}(\vec{a_z}6 - \vec{a_x}8)e^{-j(6x+8z)} \rightarrow \vec{H}_i(x,z,t) = \frac{1}{120\pi}(\vec{a_z}6 - \vec{a_x}8)\cos(3\times 10^9 t - 6x - 8z)$$

d) *Determine os coeficientes de reflexão e de transmissão.*

De acordo com a Lei de Snell,

$$sin(\theta_t) = sin(\theta_i)\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = sin(36.86)\sqrt{\frac{1}{2.5}} = 0.38 \rightarrow \theta_t = 22.3°$$

Assim, através das fórmulas obtidas em aula $\eta_2 = \eta_0\sqrt{\frac{\mu_2}{\epsilon_2}} = \frac{1}{189.7\pi}$

$$R = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 cos(\theta_i) - \eta_1 cos(\theta_t)}{\eta_2 cos(\theta_i) + \eta_1 cos(\theta_t)} = -0.292$$

$$T = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 cos(\theta_i)}{\eta_2 cos(\theta_i) + \eta_1 cos(\theta_t)} = 0.707$$

e) *Encontre os campos elétricos e magnéticos para as ondas refletidas $\vec{E}_r, \vec{H}_r$ e transmitidas $\vec{E}_t, \vec{H}_t$*

$$\vec{E}_r(x,z) = \vec{a_y}R \times 10e^{-j(6x-8z)} \rightarrow \vec{E}_r(x,z) = -\vec{a_y}2.92e^{-j(6x-8z)}$$

$$\vec{E}_r(x,z,t) = -\vec{a_y}2.92\cos(3\times 10^9 t - 6x + 8z)$$

$$\vec{H}_r(x,z) = \frac{1}{\eta_0}(0.6\vec{a_x} - 0.8\vec{a_z}) \times (-\vec{a_y})2.92e^{-j(6x-8z)} \rightarrow \vec{H}_r(x,z) = \frac{1}{120\pi}(-1.75\vec{a_z} - 2.33\vec{a_x})e^{-j(6x-8z)}$$

$$\vec{H}_r(x,z,t) = \frac{1}{120\pi}(-1.75\vec{a_z} - 2.33\vec{a_x})\cos(3\times 10^9 t - 6x + 8z)$$

Como o ângulo de transmissão é 22,3, $\sin 22.3 = 0.38$ e $\cos(22.3) = 0.92$. Assim,

$$\vec{E}_t(x,z) = \vec{a_y}T \times 10e^{-j(3.8x+9.2z)} \rightarrow \vec{E}_t(x,z) = \vec{a_y}7.07e^{-j(3.8x+9.2z)}$$

$$\vec{E}_t(x,z,t) = \vec{a_y}7.07\cos(3\times 10^9 t - 3.8x - 9.2z)$$

$$\vec{H}_t(x,z) = \frac{1}{\eta_2}(0.38\vec{a_x} + 0.92\vec{a_z}) \times (\vec{a_y})7.07e^{-j(3.8x+9.2z)} \rightarrow \vec{H}_t(x,z) = \frac{1}{189.7\pi}(2.68\vec{a_z} - 6.5\vec{a_x})e^{-j(3.8x+9.2z)}$$

$$\vec{H}_t(x,z,t) = \frac{1}{189.7\pi}(2.68\vec{a_z} - 6.5\vec{a_x})\cos(3\times 10^9 t - 3.8x - 9.2z)$$

f) *Determine o ânglulo de Brewster e o ângulo de incidência para ocorrer reflexão total (e como seria possível isso ocorrer)*

Quando não há reflexão, ou seja, R = 0, existe o chamado ângulo de Brewster θ_B, onde

$$sin^2(\theta_B) = \frac{1 - \mu_1\epsilon_2/\mu_2\epsilon_1}{1 - (\mu_1/\mu_2)^2}$$

Porém, não há ângulo de transmissão total para interfaces envolvendo materiais não magnéticos no modo TE.

E para reflexão total, pela lei de Snell, só é possivel ocorrer se a onda vier do meio 2 para o meio 1, que seria então. $sin(\theta_t) = sin(\theta_i)\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}$, e para $\theta_t = 90°$, $\epsilon_1 = 2.5$ e $\epsilon_2 = 1$

$$\theta_i = sin^{-1}\sqrt{\frac{1}{2.5}} = 39.23°$$

Perceba que só ocorre reflexão total para uma onda vindo de um meio 1 para o meio 2 se $\epsilon_1 > \epsilon_2$

Problema 1.04. (Cheng Cap 8 Ex 23)
Resolva novamente o exercício 1.03 para o caso do campo incidente em z=0 ser:
$\vec{E_i}(y,z) = 5(\vec{a_y} + \vec{a_z}\sqrt{3})e^{j6(\sqrt{3}y-z)}$

Nesse exercício está sendo adotado o modo TM. A constante de fase $\vec{k} = k_y\vec{a_y} + k_z\vec{a_z} = -6sqrt3\vec{a_y} + 6\vec{a_z}$. Assim, $\beta = \sqrt{k_y^2 + k_z^2} = \sqrt{(-6\sqrt{3})^2 + 6^2} = 12[\text{rad/m}]$

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \to \lambda = 0.524 \text{ [m]}$$

$$f = \frac{c}{\lambda} \to f = 5.73 \times 10^8 \text{ [Hz]}$$

$$\omega = 2\pi f = 3.6 \times 10^9 [\text{rad/s}]$$

$$\vec{E_i}(y,z,t) = 5(\vec{a_y} + \vec{a_z}\sqrt{3})\cos(3.6 \times 10^9 t + 6\sqrt{3}y - 6z)$$

$$\vec{H_i}(y,z) = \frac{1}{\eta_0}\vec{a_{ni}} \times \vec{E_i} = \frac{1}{120\pi}(\frac{-6\sqrt{3}\vec{a_y} + 6\vec{a_z}}{12}) \times 5(\vec{a_y} + \vec{a_z}\sqrt{3})e^{j6(\sqrt{3}y-z)}$$

$$\vec{H_i}(y,z) = \frac{1}{120\pi}-\vec{a}_x 5(\frac{3}{2} + \frac{1}{2})e^{j6(\sqrt{3}y-z)} \longrightarrow \vec{H_i}(y,z) = -\vec{a}_x\frac{1}{12\pi}e^{j6(\sqrt{3}y-z)}$$

$$\vec{H_i}(y,z,t) = -\vec{a}_x\frac{1}{12\pi}\cos(3.6 \times 10^9 t + 6\sqrt{3}y - 6z)$$

O ângulo de incidência será então $\theta_i = tan^{-1}(\frac{5\sqrt{3}}{5}) = 60°$ e o de transmissão $\theta_t = \sin^{-1}(\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}}\sin\theta_i) = 33.21°$

$$R = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 cos(\theta_t) - \eta_1 cos(\theta_i)}{\eta_2 cos(\theta_t) + \eta_1 cos(\theta_i)} = 0.0284$$

$$T = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 cos(\theta_i)}{\eta_2 cos(\theta_t) + \eta_1 cos(\theta_i)} = 0.614$$

$$\vec{E}_r(y,z) = R{*}5(-\vec{a_y}+\vec{a_z}\sqrt{3})e^{j6(\sqrt{3}y+z)} \longrightarrow \vec{E}_r(y,z,t) = R{*}5(-\vec{a_y}+\vec{a_z}\sqrt{3})\cos(3.6\times10^9t+6\sqrt{3}y+6z)$$

$$\vec{H}_r(y,z) = \frac{1}{\eta_0}(\vec{a_{nr}}) \times \vec{E}_r = \frac{1}{120\pi}(-\vec{a_y}\frac{\sqrt{3}}{2} - \vec{a_z}\frac{1}{2}) \times (-\vec{a_y} + \vec{a_z}\sqrt{3})R * 5e^{j6(\sqrt{3}y+z)}$$

$$\vec{H}_r(y,z) = R\frac{(-\vec{a}_x)}{12\pi}e^{j6(\sqrt{3}y+z)} \longrightarrow \vec{H}_r(y,z,t) = -R\frac{(\vec{a_x})}{12\pi}\cos(3.6\times10^9t+6\sqrt{3}y+6z)$$

Como o ângulo de reflexão é $\theta_t = 33.21$, $\sin\theta_t = 0.54$ e $\cos\theta_t = 0.83$. Então, $\beta\sin\theta_t = 6.48$ e $\beta\cos\theta_t = 9.96$

$$\vec{E}_t(y,z) = 5T(0.54\vec{a_y} + 0.83\vec{a_z})e^{j(6.48y-9.96z)}$$

$$\vec{E}_t(y,z,t) = 3.07(0.54\vec{a_y} + 0.83\vec{a_z})\cos(3.6\times10^9t + 6.48y - 9.96z)$$

$$\vec{H}_t(y,z) = -\vec{a}_x\frac{10T}{\eta_2}e^{j(6.48y-9.96z)} \longrightarrow \vec{H}_t(y,z,t) = -\vec{a}_x\frac{6.14}{189.7\pi}\cos(3.6\times10^9t + 6.48y - 9.96z)$$

Para o modo TM, é possível haver transmissão total mesmo para meios não-magnéticos pela equação

$$sin^2(\theta_B) = \frac{1-\mu_2\epsilon_1/\mu_1\epsilon_2}{1-(\epsilon_1/\epsilon_2)^2} \longrightarrow \theta_B = 57.68°$$

Ou seja, se o ângulo de incidência for de 57.68 graus, não haverá nenhuma reflexão. E isso explica o porque do coeficiente de reflexão ser tão próximo de 0 com $\theta_i = 60°$.

E para a reflexão total, a onda vindo do meio 2 para o meio 1, continua sendo 39.23°, pois esse valor só depende dos meios que não foram alterados em relação ao exercício anterior.

Problema 1.05. (Sadiku Cap 10 ex 44)
Em um meio dielétrico ($\epsilon = 9\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$), uma onda plana com

$$\vec{H}_i = 0,2\cos(10^9t - kx - k\sqrt{8}z)\vec{a_y}$$

incide no ar em $z = 0$. Encontre:

a)θ_r e θ_t

$$\tan(\theta_i) = \frac{k_{ix}}{k_{iz}} = \frac{1}{\sqrt{8}} \rightarrow \theta_i = \theta_t = 19.47°$$

$$\sin(\theta_t) = \sin\theta_i\sqrt{\frac{\epsilon_1}{\epsilon_2}} = \frac{1}{3}(3) = 1 \rightarrow \theta_t = 90°$$

b)k

$$\beta_1 = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_1} = \frac{10^9}{3\times10^8}3 = 10 = k\sqrt{1+8} = 3k \rightarrow k = 3.333$$

c)O comprimento de onda no dialétrico e no ar

$$\lambda_1 = \frac{2\pi}{\beta_1} = 0.6283[\text{m}]$$

$$\beta_2 = \omega/c = 10/3 \rightarrow \lambda_2 = \frac{2\pi}{\beta_2} = 1.885 \text{ [m]}$$

d)O campo incidente $\vec{E_i}$

$$\vec{E_i} = \eta_1 \vec{H_i} \times \vec{a_k} = 40\pi \cos(\omega t - kx - k\sqrt{8}z) 0.2\vec{a_y} \times \frac{(\vec{a_x} + \sqrt{8}\vec{a_z})}{3}$$

$$\vec{E_i} = 25.13 \frac{(-\vec{a_z} + \sqrt{8}\vec{a_x})}{3} \cos(10^9 t - kx - k\sqrt{8}z)$$

e)O campo transmitido e refletido $\vec{E_i}$ e $\vec{E_t}$

$$R = \frac{\eta_2 cos(\theta_t) - \eta_1 cos(\theta_i)}{\eta_2 cos(\theta_t) + \eta_1 cos(\theta_i)} = -1$$

Portanto, encontra-se que

$$\vec{E_r} = 25.13 * R \frac{(\vec{a_x} + \sqrt{8}\vec{a_z})}{3} \cos(10^9 t - kx - k\sqrt{8}z)$$

$$\vec{E_r} = 25.13 \frac{(-\vec{a_x} - \sqrt{8}\vec{a_z})}{3} \cos(10^9 t - kx - k\sqrt{8}z)$$

$$T = \frac{2\eta_2 cos(\theta_i)}{\eta_2 cos(\theta_t) + \eta_1 cos(\theta_i)} = 6$$

$$\vec{E_t} = E_{t0}(\cos\theta_t \vec{a_x} - \sin\theta_t \vec{a_z}) \cos(10^9 t - \beta_2 x \sin\theta_t - \beta_2 z \cos\theta_t)$$

Assim, como $\sin\theta_t = 1$, $\cos\theta_t = 0$, $\beta_2 \sin\theta_t = 10/3$ e $E_{t0} = T * 25.13 = 150.78$ Portanto

$$\vec{E_t} = 150.78 \cos(10^9 t - 3.333x)\vec{a_z}$$

f)O ângulo de Brewster

$$sin^2(\theta_B) = \frac{1 - \mu_2\epsilon_1/\mu_1\epsilon_2}{1 - (\epsilon_1/\epsilon_2)^2} \longrightarrow \theta_B = 18.43°$$

Problema 1.06. (Sadiku Cap 10 ex 46) *Uma onda polarizada no ar incide em poliestireno ($\epsilon = 2,6\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$) com o ângulo de Brewster. Determine o ângulo de transmissão.*
Como ambos os meios são não magnéticos, consideramos que a polarização é TM para haver o ângulo de Brewster. Assim,

$$sin^2(\theta_B) = \frac{1 - \mu_2\epsilon_1/\mu_1\epsilon_2}{1 - (\epsilon_1/\epsilon_2)^2} \longrightarrow \theta_B = 58.19°$$

A equação abaixo também funciona para os casos onde $\mu_1 = \mu_2$.

$$\tan\theta_B = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} \longrightarrow \theta_B = 58.19°$$

Problema 1.07. (Cheng Cap 8 Ex 41)

Para prevenir interferência de ondas na vizinhança da fibra e para proteção mecânica, fibras óticas individuais são usualmente revestidas por material com menor índice de refração, conforme mostra a Figura 2, onde $n_2 < n_1$.

a)*Expresse o ângulo máximo de incidência θ_a em termos de n_0, n_1 e n_2 para incidência de raios meridionais na face da extremidade do núcleo e com a condição de ficarem presos internamente ao núcleo por meio da reflexão total; (Raios meridionais são aqueles que passam através do eixo da fibra. O ângulo θ_a é denominado ângulo de aceitação, e $\sin\theta_a$ é o número de abertura (N. A.) da fibra).*

$$n_0 \sin\theta_a = n_1 \sin(90^\circ - \theta_c) = n_1 \cos\theta_c$$

$$n_0 \sin\theta_a = n_1\sqrt{1-\sin^2\theta_c} = n_1\sqrt{1-(\frac{n_2}{n_1})^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$sin\theta_a = \frac{\sqrt{n_1^2 - n_2^2}}{n_o}$$

b) *Encontre θ_a e N.A. se $n_1 = 2$, $n_2 = 1,74$ e $n_0 = 1$.*

$$NA = sin\theta_a = \frac{\sqrt{2^2 - 1.74^2}}{1} = 0.9861$$

$$\theta_a = \sin^{-1}(0.9861) = 80.43^\circ$$

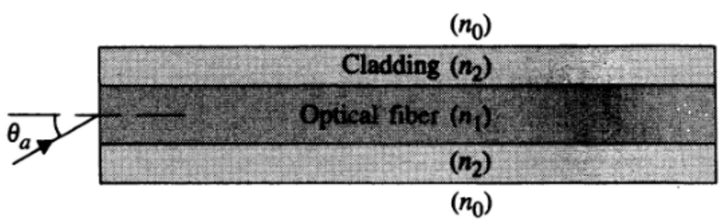

Figura 2: Figura para o exercício 1.05

Problema 1.08. (Orfanidis)

Observando a Figura 3, calcule o coeficiente de reflexão e de transmissão $R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}}$ e $T = \frac{E'_{2+}}{E_{1+}}$

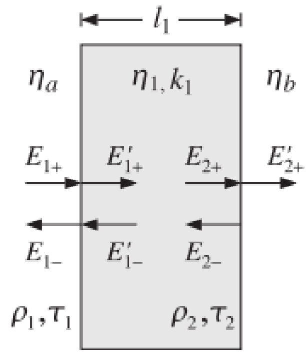

Figura 3: Dielétrico de M camadas

Definindo os coeficientes de reflexão de η_a para η_1 e de η_1 para η_b são, respectivamente

$$\rho_1 = \frac{\eta_1 - \eta_a}{\eta_1 + \eta_a} \mapsto \rho_2 = \frac{\eta_b - \eta_1}{\eta_b + \eta_1}$$

Os coeficientes de transmissão também podem ser definidos como

$$\tau_1 = 1 + \rho_1 \mapsto \tau_2 = 1 + \rho_2$$

Com esses dados, vamos escrever E_{1+} e E_{1-}

$$E_{1+}\tau_1 = E'_{1+} + \rho_1 E'_{1-} \longrightarrow E_{1-}\tau_1 = \rho_1 E'_{1+} + E'_{1-}$$
$$E'_{1+} = e^{jk_1l_1}E_{2+} \longrightarrow E'_{1-} = e^{-jk_1l_1}E_{2-}$$
$$E_{2+}\tau_2 = E'_{2+} \longrightarrow E_{2-}\tau_2 = \rho_2 E'_{2+}$$

Ou escrevendo na forma matricial, temos que

$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_1}\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E'_{1+} \\ E'_{1-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_1}\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{jk_1l_1} & 0 \\ 0 & e^{-jk_1l_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E_{2+} \\ E_{2-} \end{bmatrix}$$
$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_1}\begin{bmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{jk_1l_1} & 0 \\ 0 & e^{-jk_1l_1} \end{bmatrix}\frac{1}{\tau_2}\begin{bmatrix} 1 & \rho_2 \\ \rho_2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E'_{2+} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Isso ocorre pois é assumido que $E'_{2-} = 0$

$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_1\tau_2}\begin{bmatrix} e^{jk_1l_1} & \rho_1 e^{-jk_1l_1} \\ \rho_1 e^{jk_1l_1} & e^{-jk_1l_1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} E'_{2+} \\ \rho_2 E'_{2+} \end{bmatrix}$$

$$E_{1+} = \frac{e^{jk_1l_1}}{\tau_1\tau_2}(1 + \rho_1\rho_2 e^{-j2k_1l_1})E'_{2+}$$

$$E_{1-} = \frac{e^{jk_1l_1}}{\tau_1\tau_2}(\rho_1 + \rho_2 e^{-j2k_1l_1})E'_{2+}$$

Podemos resolver então esse sistema para

$$R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{\rho_1 + \rho_2 e^{-j2k_1 l_1}}{1 + \rho_1 \rho_2 e^{-j2k_1 l_1}}$$

$$T = \frac{E'_{2+}}{E_{1+}} = \frac{\tau_1 \tau_2 e^{-jk_1 l_1}}{1 + \rho_1 \rho_2 e^{-j2k_1 l_1}}$$

Problema 1.09. (Orfanidis)

Observando a Figura 4, calcule os coeficientes $R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}}$ e $T = \frac{E'_{M+1+}}{E_{1+}}$.

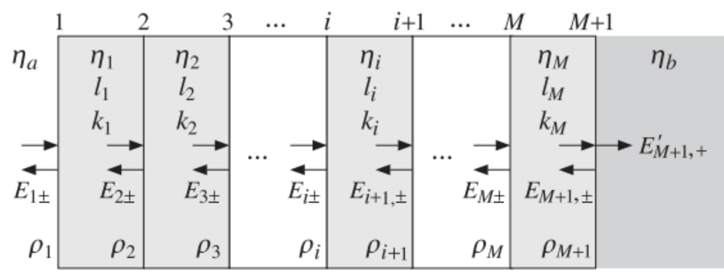

Figura 4: Incidência em um dielétrico de M camadas

Conforme o exercício anterior, é possível ver que

$$\rho_1 = \frac{\eta_1 - \eta_a}{\eta_1 + \eta_a} \mapsto \rho_i = \frac{\eta_i - \eta_{i-1}}{\eta_i + \eta_{i-1}} \mapsto \rho_{M+1} = \frac{\eta_b - \eta_M}{\eta_b + \eta_M}$$

Os coeficientes de transmissão também podem ser definidos como

$$\tau_i = 1 + \rho_i$$

Os campos são então calculados como

$$\begin{bmatrix} E_{i+} \\ E_{i-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_i} \begin{bmatrix} e^{jk_i l_i} & \rho_i e^{-jk_i l_i} \\ \rho_i e^{jk_1 l_1} & e^{-jk_i l_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{(i+1)+} \\ E_{(i+1)-} \end{bmatrix}, i = M, M-1, ..., 1$$

$$\begin{bmatrix} E_{(M+1)+} \\ E_{(M+1)-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_{M+1}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{M+1} \\ \rho_{M+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{(M+1)+} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, sendo $P_i = \frac{1}{\tau_i} \begin{bmatrix} e^{jk_i l_i} & \rho_i e^{-jk_i l_i} \\ \rho_i e^{jk_1 l_1} & e^{-jk_i l_i} \end{bmatrix}$, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = P_1 . P_2 . \ldots . P_M \frac{1}{\tau_{M+1}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{M+1} \\ \rho_{M+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{(M+1)+} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{1+} \\ E_{1-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{(M+1)+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} E'_{(M+1)+} \\ \mathrm{T}_{21} E'_{(M+1)+} \end{bmatrix}$$

Onde $\mathrm{T} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{21} \end{bmatrix}$ é a matriz de transferência total. Com essa matriz devidamente calculada, é possível então determinar os coeficientes de reflexão e transmissão

$$R = \frac{E_{1-}}{E_{1+}} = \frac{1}{\mathrm{T}_{11}}$$

$$T = \frac{E'_{(M+1)+}}{E_{1+}} = \frac{\mathrm{T}_{21}}{\mathrm{T}_{11}}$$

Problema 1.10. (Orfanidis)

Observando a Figura 5, calcule os coeficientes $R = \frac{E_{T1-}}{E_{T1+}}$ e $T = \frac{E'_{T,M+1_+}}{E_{T1+}}$.

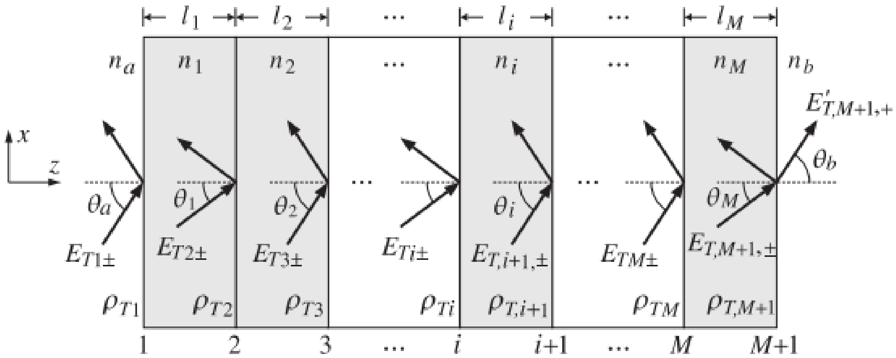

Figura 5: Incidência oblíqua em um dielétrico de M camadas

Esse exercício segue a mesma idéia do exercício anterior, porém agora é necessário levar em consideração o ângulo de incidência. Desse modo, pela Lei de Snell

$$n_a \sin\theta_a = n_i \sin\theta_i = n_b \sin\theta_b \longrightarrow \cos\theta_i = \sqrt{1 - \frac{n_a^2 sin^2\theta_a}{n_i^2}}$$

O deslocamento de fase é então

$$\delta_i = k_{z,i} l_i = \frac{\omega}{c_0} n_i l_i \cos\theta_i$$

O coeficiente de transmissão e reflexão deve levar em conta da incidência ser TM ou TE. Agora,

$$\rho_{T,i} = \frac{n_{T,i-1} - n_{T,i}}{n_{T,i-1} + n_{T,i}} \mapsto \tau_{T,i} = \frac{2n_{T,i-1}}{n_{T,i-1} + n_{T,i}}$$

onde,

$$n_{T,i} = \frac{n_i}{\cos\theta_i} \text{ para a polarização TM}$$
$$\text{ou } n_{T,i} = n_i \cos\theta_i \text{ para a polarização TE}$$

Os campos incidentes serão então

$$\begin{bmatrix} E_{i+} \\ E_{i-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_{T,i}} \begin{bmatrix} e^{j\delta_i} & \rho_{T,i} e^{-j\delta_i} \\ \rho_{T,i} e^{j\delta_i} & e^{-j\delta_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{(i+1)+} \\ E_{(i+1)-} \end{bmatrix}, i = M, M-1, ..., 1$$

$$\begin{bmatrix} E_{T,(M+1)+} \\ E_{T,(M+1)-} \end{bmatrix} = \frac{1}{\tau_{T,M+1}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{T,M+1} \\ \rho_{T,M+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{T,(M+1)+} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Desse modo, sendo $P_i = \frac{1}{\tau_{T,i}} \begin{bmatrix} e^{j\delta_i} & \rho_{T,i} e^{-j\delta_i} \\ \rho_{T,i} e^{j\delta_i} & e^{-j\delta_i} \end{bmatrix}$, podemos escrever

$$\begin{bmatrix} E_{T,1+} \\ E_{T,1-} \end{bmatrix} = P_1.P_2.\ldots.P_M \frac{1}{\tau_{T,M+1}} \begin{bmatrix} 1 & \rho_{T,M+1} \\ \rho_{T,M+1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{(T,M+1)+} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} E_{T,1+} \\ E_{T,1-} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} & \mathrm{T}_{12} \\ \mathrm{T}_{21} & \mathrm{T}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E'_{T,(M+1)+} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{T}_{11} E'_{T,(M+1)+} \\ \mathrm{T}_{21} E'_{T,(M+1)+} \end{bmatrix}$$

Assim o exercício fica resolvido com

$$R = \frac{E_{T,1-}}{E_{T,1+}} = \frac{1}{\mathrm{T}_{11}}$$

$$T = \frac{E'_{T,(M+1)+}}{E_{T,1+}} = \frac{\mathrm{T}_{21}}{\mathrm{T}_{11}}$$

Resumo das equações:

Para modo TE:

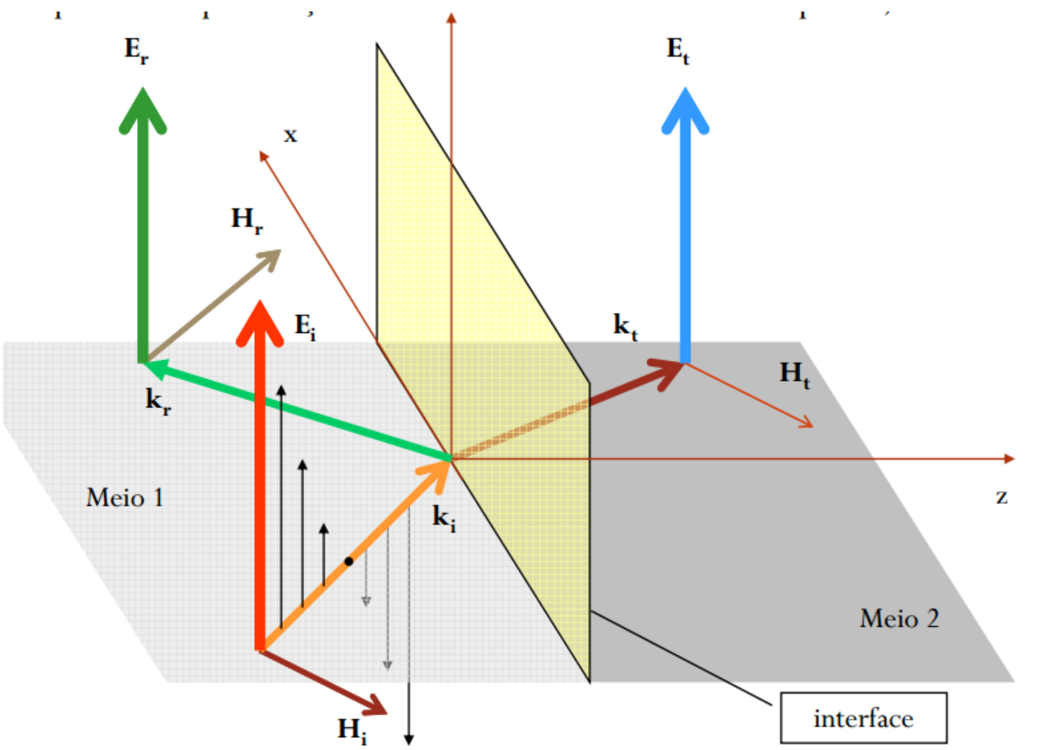

Figura 6: Incidencia TE

$$\boxed{\begin{aligned}\Gamma_\perp = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} &= \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \\ &= \frac{(\eta_2/\cos\theta_t) - (\eta_1/\cos\theta_i)}{(\eta_2/\cos\theta_t) + (\eta_1/\cos\theta_i)}\end{aligned}} \qquad \boxed{\begin{aligned}\tau_\perp = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} &= \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} \\ &= \frac{2(\eta_2/\cos\theta_t)}{(\eta_2/\cos\theta_t) + (\eta_1/\cos\theta_i)}.\end{aligned}}$$

$$\boxed{1 + \Gamma_\perp = \tau_\perp,}$$

Figura 7: Equações para TE

Para modo TM:

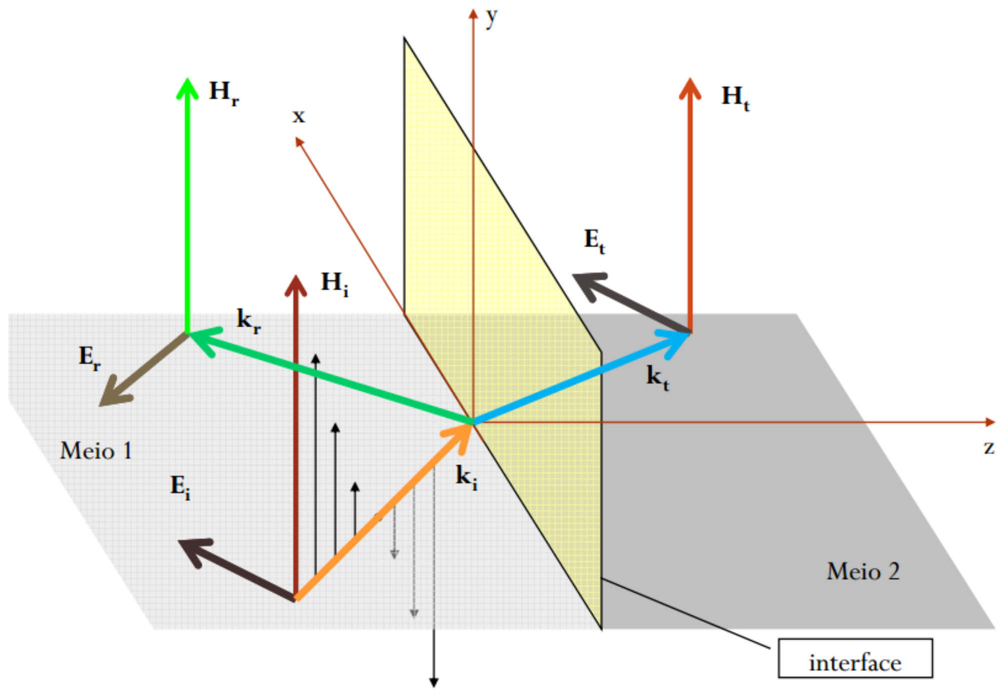

Figura 8: Incidencia TM

$$\boxed{\Gamma_{\|} = \frac{E_{r0}}{E_{i0}} = \frac{\eta_2 \cos\theta_t - \eta_1 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}} \quad \boxed{\tau_{\|} = \frac{E_{t0}}{E_{i0}} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_t + \eta_1 \cos\theta_i}.}$$

$$\boxed{1 + \Gamma_{\|} = \tau_{\|}\left(\frac{\cos\theta_t}{\cos\theta_i}\right).}$$

Figura 9: Equações para TM